Comentarios a las respuestas a la teoría

Sorprendentemente, con pocas excepciones, la mayoría de vosotros eligió la pregunta b) del examen *Propiedad de la media y principio de extremo para funciones armónicas*, que, a mi parecer, es conceptualmente más compleja que la pregunta a) *Ceros de una función holomorfa. Principio de identidad.*

El primer error en las respuestas a la pregunta b) se debe a que no sabéis leer el español. La pregunta hay que leerla tal como estaba escrita: la conjunción *y* indica que tanto *Propiedad de la media* como *principio de extremo*, se refieren ambos a las funciones armónicas. No cabe aquí otra interpretación. Distinto es que se hubiera escrito *Propiedad de la media. Principio de extremo para funciones armónicas*. Por tanto, al hacer la pregunta de la forma en que se hizo, se pretendía que se probara la propiedad de la media para funciones armónicas, lo cual requiere, previamente, relacionar las funciones armónicas con las holomorfas. Nadie ha hecho esto. ¿Nadie entiende el español? ¿Nadie tuvo siquiera dudas sobre lo que se preguntaba?

Para que no vuelva a ocurrir nada parecido y sepáis qué es lo que se espera que hagáis al responder a una pregunta teórica, voy a escribir y a comentar la respuesta a la pregunta b) del examen.

Propiedad de la media y principio de extremo para funciones armónicas

Lo primero es dar la definición de función armónica ¡para que sepamos de dónde partimos! (hay quien considera *¡como definición de función armónica!* el ser continua y verificar la igualdad de la media, con lo cual la pregunta hecha deja, automáticamente, de tener sentido. Se supone, digo yo, que las preguntas que se hacen hay que contestarlas teniendo en cuenta el desarrollo que se ha hecho en clase.)

Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^2$; una función $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ se dice que es **armónica** en Ω, si tiene derivadas parciales de segundo orden continuas en Ω y satisface la ecuación de Laplace en Ω, es decir, para todo $(x,y)\in\Omega$, se verifica que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0$$

Si u es una función armónica en Ω, entonces la función

$$f(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\qquad z=x+iy\in\Omega$$

es holomorfa en Ω, pues $\operatorname{Re}(f)=\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\operatorname{Im}(f)=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ son funciones de clase C^1, y por tanto diferenciables en Ω, y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(x,y)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(x,y)$$

Toda función armónica, u, *en un dominio estrellado*, Ω, es la parte real de una función holomorfa en Ω. Pues, en virtud del teorema de Cauchy, en su versión local, sabemos que toda función holomorfa en un dominio estrellado tiene primitivas en él; en particular la función $f = \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\dfrac{\partial u}{\partial y}$, tendrá primitivas en Ω, es decir, existe una función g, holomorfa en Ω, tal que $g' = f$, es decir, para todo $z = x + iy \in \Omega$, es:

$$\frac{\partial \mathrm{Re} g}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial \mathrm{Re} g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

y deducimos que la función $u - \mathrm{Re} g$ es constante en Ω (pues es diferenciable con derivadas parciales nulas en el dominio Ω), es decir, hay un número real λ tal que $u = \mathrm{Re} g + \lambda$, por lo que u es la parte real de la función holomorfa $g + \lambda$.

Vamos a probar que toda función armónica, u, en un abierto Ω verifica la igualdad de la media en Ω. Sean $a \in \Omega$ y $\rho > 0$ tales que $\overline{D(a,\rho)} \subset \Omega$. Sea $R > \rho$ tal que $D(a,R) \subseteq \Omega$. Según acabamos de probar, existe g holomorfa en $D(a,R)$ tal que $u(x,y) = \mathrm{Re} g(x+iy)$ para todo $x + iy \in D(a,R)$. Teniendo en cuenta que $\overline{D(a,\rho)} \subset D(a,R)$, podemos aplicar la fórmula de Cauchy para la circunferencia a la función g y a la circunferencia $C(a,\rho)$, para obtener que:

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{g(w)}{w-a}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(a + \rho e^{it})dt$$

y, tomando partes reales, deducimos que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(a + \rho e^{it})dt$$

que es lo que se quería probar.

Para probar la propiedad de extremo para funciones armónicas, usaremos que toda función subarmónica en un dominio que alcanza, en algún punto del mismo, un máximo absoluto, es constante en dicho dominio.

Recordemos que si Ω un abierto en $\mathbb{R}^2$; una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que es **subarmónica** en Ω, si es continua en Ω y verifica la desigualdad de la media en Ω, es decir, si $a \in \Omega$ y $\rho > 0$ son tales que $\overline{D(a,\rho)} \subset \Omega$, entonces

$$\varphi(a) \le \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(a + \rho e^{it})dt.$$

Según acabamos de probar, toda función armónica en un abierto también es subarmónica en dicho abierto.

Teorema. Toda función armónica en un dominio, que alcanza en algún punto del mismo un extremo relativo, es constante en dicho dominio.

Demostración:

Sea Ω un dominio en el plano, u una función armónica en Ω, y supongamos que u alcanza en un punto, $a \in \Omega$, un extremo relativo. Sin pérdida de generalidad, puede suponerse que u alcanza en el punto a un máximo relativo (pues si fuera un mínimo bastaría sustituir u por $-u$ que también es armónica). Existe, por tanto, un número $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$ y $u(z) \le u(a)$ para todo $z \in D(a,\rho)$. En consecuencia, la función restringida, $u_{|D(a,\rho)}$, que, según sabemos, es subarmónica, alcanza un máximo absoluto y, por tanto, es constante. Hemos probado que u es constante en el disco $D(a,\rho)$. Por tanto, la función $f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$, es nula en $D(a,\rho)$, y como, por ser u armónica, f es holomorfa en Ω, que es un dominio, el principio de identidad nos dice que f es nula en Ω, es decir, la función diferenciable u tiene derivadas parciales nulas en Ω y, en consecuencia, es constante en Ω.

La pregunta a) *Ceros de una función holomorfa. Principio de identidad*, había que responderla conforme al siguiente esquema:

Teorema. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω. Definamos

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) f es idénticamente numa en Ω;

b) El conjunto de los ceros de f en Ω tiene algún punto de acumulación en Ω ($Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$);

c) Hay algún punto en Ω, $a \in \Omega$, en el cual f y todas sus derivadas se anulan: $f^{(k}(a) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Corolario. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa y no idénticamente nula en Ω. Entonces se verifica que:

a) El conjunto, $Z(f)$, de los ceros de f, es un conjunto de puntos aislados en Ω;

b) El conjunto $Z(f)$ es numerable;

c) Dado $a \in Z(f)$, el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : f^{(k}(a) \neq 0\}$ es no vacío; su mínimo se llama *orden del cero* que f tiene a.

Principio de identidad. Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y f, g funciones holomorfas en Ω. Supongamos que f y g coinciden en todos los puntos de un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ que tiene algún punto de acumulación en Ω, es decir, $\mathcal{A}' \cap \Omega \neq \emptyset$; entonces se verifica que f y g coinciden en Ω.

Caracterizaciones de los ceros. Sea f una función holomorfa en un abierto Ω y sea $a \in \Omega$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

a) f tiene un cero en a de orden k;

b) Hay una función, g, holomorfa en Ω tal que $g(a) \neq 0$ y $f(z) = (z-a)^k g(z)$ para todo $z \in \Omega$;

c) $\displaystyle \lim_{z \to a} \frac{f(z)}{(z-a)^k} = w \in \mathbb{C}^*$